Academia Tehnică Militară “Ferdinand I”
MINISTERUL EDUCAȚIEI
FUNDATIA TRAIAN LALESCU DE LA MATEMATICA... SPRE LUME

Concursul Naţional Studenţesc de Matematică “Traian Lalescu”

Secţiunea E

9-11 mai 2024

Problema 1. Fie $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2. Să se determine funcția olomorfă $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, știind că $\operatorname{Re}(f)=xy\cdot\varphi\left(x^2-y^2\right),\quad f(0)=0,\quad f(1)=\mathrm{i}.$

Problema 2. Fie $f(z)=\dfrac{a\cdot z}{a^2+\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)\cdot a-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}},\quad a\in\mathbb{R},\quad a>0.$

a) Calculați $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z.$

b) Fie s_a o singularitate izolată oarecare a funcției f și fie

$g(a)=\left[\dfrac{a+1}{\left(a^2+1\right)\cdot\ln a}\cdot\operatorname{Re}\left(\operatorname{Rez}\left(f;s_a\right)\right)\right]^2$. Calculați $\displaystyle\int_0^\infty g(a)\cdot\cos(na)\,\mathrm{d}a,\quad n\in\mathbb{N}^*.$

Problema 3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t)=\dfrac{1-a^2}{2\left(1-2\cdot a\cdot\cos t+a^2\right)},\quad a\in(0,1).$

a) Arătați că f este periodică.

b) Dezvoltați f în serie Fourier trigonometrică.

c) Calculați $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1-2\cdot a\cdot\cos t+a^2\right)^2}$, folosind, eventual, punctul b).

Problema 4. Fie $I(t)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin\left(t\cdot x^2\right)}{x^2}\mathrm{d}x,\quad t>0.$

a) Arătați că $I(t)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\cdot\sqrt{t}.$

b) Determinați soluția problemei Cauchy

$y''(t)+y'(t)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin\left(t^2\right)}{t^2}\mathrm{d}t$, $y(0)=y'(0)=0.$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 4 ore