



Concursul Național Studențesc de Matematică "Traian Lalescu"

Secțiunea D

9-11 mai 2024

Problema 1.

Construiți $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, olomorfă neconstantă, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$,
dacă $\varphi(2u - 3v) = 2xy$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ și $f(0) = 0$.

Problema 2.

Să se calculeze:

$$\int_{|z-i|=1} \left(|z|^2 + iz + 1 \right)^{2024} \cdot e^{|z|^2 + iz - 1} dz.$$

Problema 3.

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-x)\sin^2 x}{x^2(it-ix+1)^n} dx, \text{ unde } n \in \mathbb{N} \text{ și } n \geq 3.$$

a) Demonstrați egalitatea:

$$\mathcal{F} \left[sa^2 \left(\frac{at}{2} \right) \right] (\omega) = \frac{2\pi(a-|\omega|)}{a^2} \cdot u(a-|\omega|), \text{ unde } a > 0,$$

$$sa(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ și } u(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \text{ (funcția lui Heaviside).}$$

b) Să se determine $\hat{f}(-1)$, unde \hat{f} este transformata Fourier a funcției f , $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$.

Problema 4.

Să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = \frac{1}{2 + \sin(2t)} \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 4 ore.