Concursul Naţional Studenţesc de Matematică "Traian Lalescu"
Secţiunea C, 9-11 mai 2024

Problema 1. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 9^n} x^{2n}$.

a) Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei.

b) Să se calculeze suma seriei pe mulţimea ei de convergenţă.

c) Să se calculeze $I = \int_0^1 (\ln x)^{2024} dx$.

Problema 2. Fie funcţia $f : \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| xyz \neq 0\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = ax + 2y + z - \frac{1}{xyz}$, unde a este un parametru real.

a) Să se determine a pentru care ecuaţia $f(x,y,z) = 0$ defineşte o funcţie implicită $z = z(x,y)$ într-o vecinatate a punctului $(1,1,-1)$.

b) Să se scrie polinomul Taylor de gradul întâi asociat funcţiei z definite la punctul a), în punctul $(1,1)$.

c) Pentru $a = -2$, să se determine extremele locale ale funcţiei f.

Problema 3. Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operatorul liniar pentru care $T(1,0,0) = (a,b,b)$, $T(0,1,0) = (b,a,b)$ şi $T(0,0,1) = (b,b,a)$, unde $a,b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0$. Fie A matricea asociată operatorului T în baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

a) Demonstraţi că mulţimea punctelor (a,b) pentru care operatorul T nu este bijectiv este reuniunea a două drepte din plan şi precizaţi ecuaţiile lor.

b) Pentru $a = b$, aflaţi complementul ortogonal al subspaţiului vectorial $KerT$, considerând spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ înzestrat cu produsul scalar canonic.

c) Calculaţi $A^n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 4. Pentru fiecare $t \in [0,\infty)$, definim următoarele sfere:

$S_1(t) : (x - 3\cos t)^2 + (y - 4\sin t)^2 + z^2 = (2 + \cos t)^2$ şi

$S_2(t) : (x + 3\cos t)^2 + (y + 4\sin t)^2 + z^2 = (2 + \sin t)^2$.

a) Demonstraţi că pentru orice $t \in [0,\infty)$, cele două sfere nu au puncte comune.

b) Determinaţi $t \in [0,\pi]$ pentru care există un plan paralel cu planul xOy, tangent la ambele sfere.

c) Aflaţi ecuaţia carteziană a suprafeţei descrise de punctele tuturor tangentelor la sfera $S_2(0)$, duse din punctul $M(-10,0,0)$.

Notă: ***Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru este de 4 ore.***