Academia Tehnică Militară "Ferdinand I"

MINISTERUL EDUCAȚIEI

FUNDATIA TRAIAN LALESCU DE LA MATEMATICA... SPRE LUME

Concursul Naţional Studenţesc de Matematică "Traian Lalescu"

Secţiunea B

9-11 mai 2024

Problema 1. Fie $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, polinoame neconstante de coeficient dominant 1, astfel încât $k=\operatorname{grad}(P)=\operatorname{grad}(Q)+1$.

a. Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{2x}\frac{t^{k-1}}{P(t)}dt=\ln 2.$

b. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă care satisface $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1,$ determinaţi valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{2x}\frac{f\left(Q(t)\right)}{P(f(t))}dt.$

Problema 2. Fie $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB+BA=A+B.$ Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a. $\operatorname{rang}AB+n=\operatorname{rang}A+\operatorname{rang}B;$

b. $\operatorname{Ker}B\subset\operatorname{Im}A.$

Problema 3. Fie V, un spaţiu vectorial finit dimensional, şi $T:V\to V$ un endomorfism.

a. Să se arate că există $k\in\mathbb{N}^*$ şi un endomorfism $P:V\to V$ cu proprietăţile:

$$P\circ P=P,\ \operatorname{Ker}P=\operatorname{Ker}T^k \text{ şi } \operatorname{Im}P=\operatorname{Im}T^k.$$

b. Rămâne adevărată afirmaţia a. pentru cazul în care V nu are dimensiune finită?

Problema 4. Considerăm funcţia pară $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ de clasă C^2 pentru care $f(0)=0$ şi $f''(0)>0$. Definim şirul $(a_n)_{n\geq1}$ de termen general

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right),\quad \forall n\geq1.$$

a. Arătaţi că funcţia f' este impară, şirul $(a_n)_{n\geq1}$ este convergent şi calculaţi $l=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

b. Presupunem, în plus, că f este de clasă C^4, cu $f^{(4)}(0)>0$. Studiaţi natura seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-l)$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(a_n-l).$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru este de 4 ore.