



Concursul Național Studențesc de Matematică "Traian Lalescu"

Secțiunea A

9-11 mai 2024

Problema 1. Fie $n \geq 2$ și $A \in M_n(\mathbb{C})$. Arătați că există $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$ și $B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $B^2 = B$, $\text{Ker } B = \text{Ker } A^k$ și $\text{Im } B = \text{Im } A^k$.

Problema 2. Decideți dacă grupul multiplicativ $U(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ este ciclic.

Problema 3. Fie $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A + BAC = BA + AC$. Să se arate că 1 este valoare proprie fie pentru matricea B , fie pentru matricea C , având multiplicitatea algebrică cel puțin egală cu $\frac{\text{rang } A}{2}$.

Problema 4. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n - na_{n+1}) = l \in \mathbb{R}.$$

Arătați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă și determinați suma acesteia.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru este de 4 ore.