Concursul Naţional Studenţesc de Matematică “Traian Lalescu”

Secţiunea E

9-11 mai 2024

Soluţii şi barem de corectare

Problema 1.

1 punct oficiu

$\operatorname{Re}(f)$ armonică conduce la $\varphi''\left(x^2-y^2\right)=0$ .... 4 puncte

Construcția funcției $f(z)=C_1\cdot z^4+C_2\cdot z^2+C_3$, unde $C_1,C_2,C_3\in\mathbb{C}$ .... 3 puncte

Impunere condiții inițiale.. 2 puncte

Problema 2.

1 punct oficiu

a) Determinarea singularităților izolate $z_k=\mathrm{i}\ln a-2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ ....1 punct

Condiția $|z_k|\le 1\Rightarrow|\ln a|\le 1\Rightarrow a\in\left[\frac{1}{e},e\right]$ .... 1 punct

Calculul reziduului $\operatorname{Rez}(f;z_0)=\dfrac{\ln a}{a+1}$ ....1 punct

$$\int_{|z|=1} f(z)dz=\begin{cases}\text{Dacă } a\in\left(\frac{1}{e},e\right)\Rightarrow I=2\pi i\dfrac{\ln a}{a+1}\\ \text{Dacă } a\in\left\{\frac{1}{e},e\right\}\Rightarrow I=\pi i\dfrac{\ln a}{a+1}\\ \text{Dacă } a\in\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)\cup(e,\infty)\Rightarrow I=0\end{cases}$$ ....1 punct

b) Calculul reziduului $\operatorname{Rez}(f;s_a)=\dfrac{\ln a+2k\pi i}{a+1}$ ....0.5 puncte

Determinarea $g(a)=\dfrac{1}{\left(a^2+1\right)^2}$ ....1 punct

Calculul integralei $\int_0^\infty g(a)\cos(na)\mathrm{d}a=e^{-n}(n+1)\cdot\dfrac{\pi}{4}$ ....3.5 puncte

Problema 3.

1 punct oficiu

a) $T=2\pi$ ....0.5 puncte

$$a_k+\mathrm{i}b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t \overset{e^{\mathrm{i}t}=z}{=} \frac{1-a^2}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{z^k\mathrm{d}z}{-az^2+z\left(a^2+1\right)-a}$$ ....2 puncte

$$\int_{|z|=1}\underbrace{\frac{z^k}{-az^2+z\left(a^2+1\right)-a}}_{g(z)}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Rez}(g;a)=\frac{a^k}{1-a^2}$$ .... 2 puncte

Finalizare $f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a^k\cos(kt)$ ....1.5 puncte

b) Calculul integralei $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1-2a\cos t+a^2\right)^2}=\frac{2\pi\left(1+a^2\right)}{\left(1-a^2\right)^3}$ ....3 puncte

Problema 4.

1 punct oficiu

a) Se aplică transformata Laplace lui $I(t)$ și se obține :

$$\mathscr{L}\left[I(t)\right](s)=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+s^2}$$ ....1.5 puncte

Calculul integralei $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+s^2}=\frac{1}{s^{3/2}}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ....3 puncte

Determinarea funcției original $I(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sqrt{t}$ ....0.5 puncte

b) Se notează $Y(s)=\mathscr{L}\left[y(t)\right](s)$ implică

$$s^2Y(s)+sY(s)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{s}\Rightarrow Y(s)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{s^2(s+1)}$$ ....2 puncte

Determinarea soluția problemei Cauchy $y(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(t-1+e^{-t}\right)$..................2 puncte