Concursul Naţional Studenţesc de Matematică "Traian Lalescu"

Secţiunea D

9-11 mai 2024

Soluţii şi barem de corectare

Problema 1.

1 punct oficiu

Derivarea de două ori a lui φ și obținerea relației

$\varphi''(2u-3v)\cdot\left[\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(2\frac{\partial u}{\partial y}-3\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]=0$ .... 3 puncte

Justificare $\left[\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(2\frac{\partial u}{\partial y}-3\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\neq 0$ .... 1 punct

Obținerea $\varphi(t)=at+b$ .... 0,5 puncte

Folosirea relațiilor C-R și obținerea soluțiilor sistemului omogen .... 3 puncte

Finalizare $f(z)=\frac{4+6i}{13a}\cdot\frac{z^2}{2}+C$ .... 1 punct

Determinarea constantei $C=0$ .... 0,5 puncte

Problema 2.

1 punct oficiu

Înlocuirea $|z|^2=-\frac{iz^2}{z-i}$, sau $|z|^2=2(1+\sin\theta)$, cu $z=i+e^{i\theta}$ și $\theta\in[0,2\pi]$.............. 2 puncte

Obținerea $f(z)=\left(2+\frac{i}{z-i}\right)^{2024}\cdot e^{\frac{i}{z-i}}$, sau $f(\theta)=\left(2+i\cdot e^{-i\theta}\right)^{2024}\cdot e^{i\cdot e^{-i\theta}}i\cdot e^{i\theta}$

și determinarea integralei $\int\limits_{|w|=1}\left(2+\frac{i}{w}\right)^{2024}\cdot e^{\frac{i}{w}}dw$, cu $e^{i\theta}=w$ .... 3 puncte

Identificare singularitate esențială ($z=i$, sau $w=0$).. 0,5 puncte

Calculul reziduului $\mathrm{Rez}=2^{2023}\cdot 2026i$ .... 3 puncte

Teorema reziduurilor și finalizare $I=-2^{2024}\cdot 2026\pi$ .... 0,5 puncte

Problema 3.

1 punct oficiu

a) Demonstrarea egalității .... 3 puncte

b) Recunoașterea produsului de convoluție $\hat{f}(-1)=\hat{g}(-1)*\hat{h}(-1)$, unde

$g(t)=sa^2(t),\quad h(t)=\dfrac{t}{(it+1)^n}$ .... 1 punct

$\hat{g}(-1)=\dfrac{\pi}{2}$ .... 0,5 puncte

$\hat{h}(-1)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{(it+1)^n}\cdot e^{it}dt$ și trecerea în complex, cu precizarea $z=i$ pol de ordin n ...... 1 punct

Calculul reziduului $\mathrm{Rez}=\dfrac{2-n}{e}\cdot\dfrac{1}{(n-1)!}$ .... 3 puncte

Teorema reziduurilor și finalizare $\hat{h}(-1)=\dfrac{2\pi i}{(n-1)!}\cdot\dfrac{2-n}{e}$ și $\hat{f}(-1)=\dfrac{\pi^2 i}{(n-1)!}\cdot\dfrac{2-n}{e}$ 0,5 puncte

Problema 4.

1 punct oficiu

Se aplică transformata Laplace și se obține $Y(s)=\dfrac{s+1}{s^2+4}+\dfrac{1}{s^2+4}\cdot\mathscr{L}\left[\dfrac{1}{2+\sin 2t}\right](s)$ 1 punct

Calculul $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+1}{s^2+4}\right](s)=\cos 2t+\dfrac{1}{2}\cdot\sin 2t$ .... 0,5 puncte

Formarea produsului de convoluție $\dfrac{1}{s^2+4}\cdot\mathscr{L}\left[\dfrac{1}{2+\sin 2t}\right](s)$ și obținerea integralei

$I(t)=\dfrac{1}{2}\cdot\displaystyle\int_0^t\frac{\sin 2(t-\tau)}{2+\sin 2\tau}d\tau$ .... 3 puncte

Calcul $I_1=\displaystyle\int_0^t\frac{\sin 2t\cdot\cos 2\tau}{2+\sin 2\tau}d\tau=\frac{1}{2}\sin 2t\cdot\ln\left(\frac{2+\sin 2t}{2}\right)$ .... 1 punct

Calcul $I_2=\displaystyle\int_0^t\frac{\cos 2t\cdot\sin 2\tau}{2+\sin 2\tau}d\tau=\cos 2t\left[t-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{2\,\mathrm{tg}\,t+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\pi}{6}\right]$ .... 3 puncte

Finalizare $y(t)=\cos 2t+\dfrac{1}{2}\sin 2t+\dfrac{1}{2}(I_1-I_2)$ .... 0,5 puncte