Concursul Naţional Studenţesc de Matematică "Traian Lalescu"

Secţiunea C

9-11 mai 2024

Soluţii şi barem de corectare

Problema 1.

Start...1 p

a) Raza de convergenţă $R=3$..1,5 p

$x\in(-3,3)$ seria este convergentă...0,25 p

$x=3$ seria este convergentă...0,5 p

$x=-3$ seria este convergentă..0,5 p

$[-3,3]$ mulţimea de convergenţă..0,25 p

a) $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2x^{2n-1}}{9^n}$ ....0,5 p

$S'(x)=\frac{-2x}{9+x^2}$ ....1 p

$S(x)=-\ln\left(9+x^2\right)+C$ ....1 p

$C=\ln 9$ ....0,5 p

b) Cu schimbare de variabilă adecvată ($\ln x=-y$), $I=\int_0^{\infty} y^{2024}e^{-y}dy$ ....1,5 p

$I=\Gamma(2025)$...1 p

$I=2024!$..0,5 p

Problema 2.

Start...1 p

a) $f(1,1,-1)=0$..0,5 p

$a=-2$ ....1 p

$f_z'(1,1,-1)=2\neq 0$ ....0,5 p

b) $z(1,1)=-1$ ....0,5 p

$z'_x(1,1)=\frac{3}{2}$ ....0,75 p

$z'_y(1,1)=-\frac{1}{2}$ ....0,75 p

$T_1(x,y)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y-2$ ....1 p

c) Condiţiile de punct critic:

$x^2yz=\frac{1}{2},\ xy^2z=-\frac{1}{2},\ xyz^2=-1$ ....1 p

Punctele critice $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right),\ B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$ ....1 p

Matricea Hessiană ....0,5 p

A maxim local..0,75 p

B minim local..0,75 p

Problema 3.

Start..1 p

a) $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ ....0,5 p

T nu e bijectivă $\Leftrightarrow \det A=0$ (Justificare)..1 p

$\det A=(a+2b)(a-b)^2$ ....1 p

Ecuaţiile dreptelor: $d_1: x+2y=0$

$d_2: x-y=0$ ....0,5 p

b) $KerT=\{(-\alpha-\beta,\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ ....1 p

O bază în $KerT:\{v_1=(-1,1,0),\ v_2=(-1,0,1)\}$ ....0,5 p

$(KerT)^\perp=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| \langle(x,y,z),v_1\rangle=0,\langle(x,y,z),v_2\rangle=0\right\}$ ....0,5 p

$(KerT)^\perp=\{(a,a,a) \mid a\in\mathbb{R}\}$ ....1 p

c) Polinomul caracteristic..0,5 p

Valorile proprii $\lambda_1=\lambda_2=a-b,\ \lambda_3=a+2b$ ....0,5 p

O bază formată din vectorii proprii $\{v_1=(-1,0,1),\ v_2=(-1,1,0), v_3=(1,1,1)\}$ ....1 p

$A^n=CD^nC^{-1}$ ....0,25 p

$$A^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} (a+2b)^n+2(a-b)^n & (a+2b)^n-(a-b)^n & (a+2b)^n-(a-b)^n \\ (a+2b)^n-(a-b)^n & (a+2b)^n+2(a-b)^n & (a+2b)^n-(a-b)^n \\ (a+2b)^n-(a-b)^n & (a+2b)^n-(a-b)^n & (a+2b)^n+2(a-b)^n \end{pmatrix}$$ ....0,75 p

Problema 4.

Start..1 p

a) Distanţa dintre centre $C_1C_2=\sqrt{36\cos^2 t+64\sin^2 t}$ ....1 p

$C_1C_2\geq 6$..1 p

$R_1+R_2=4+\sin t+\cos t$ ....0,5 p

$C_1C_2>R_1+R_2 \Leftrightarrow \sin t+\cos t<2, (\forall)t\geq 0$ ....0,5 p

b) Planul paralel cu $xOy: z=m$ ....0,5 p

Condiţiile de tangenţă: $|m|=R_1, |m|=R_2$...1,5 p

$t=\frac{\pi}{4}$ ....1 p

c) Familia de drepte ce trece prin *M* (neparalele cu yOz)

$\frac{x+10}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z}{b}$ ....0,5 p

Condiţia de tangenţă dintre dreaptă şi sferă..0,5 p

$a^2+b^2=\frac{4}{45}$ ....1,5 p

Ecuaţia carteziană: $y^2+z^2=\frac{4}{45}(x+10)^2$ ....0,5 p