Concursul Naţional Studenţesc de Matematică "Traian Lalescu"

Secţiunea B

9-11 mai 2024

Soluţii şi barem de corectare

Problema 1. Fie $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, polinoame neconstante de coeficient dominant 1, astfel încât $k = \operatorname{grad}(P) = \operatorname{grad}(Q) + 1$.
(a) Să se arate că

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} \frac{t^{k-1}}{P(t)}\, dt = \ln 2.$$

(b) Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă care satisface $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, determinaţi valoarea limitei:

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} \frac{f(Q(t))}{P(f(t))}\, dt.$$

Soluţie şi Barem de corectare. (a) Demonstrarea limitei, folosind descompuneri în fracţii simple a raportului $\frac{t^{k-1}}{P(t)}$ şi relaţiile lui Viete, sau mărginiri de tipul

$$t^k + mt^{k-1} \le P(t) \le t^k + Mt^{k-1}, \quad \forall t > \delta,$$

unde $m, M \in \mathbb{R}$. ....4 puncte

(b) Observăm că raportul $\frac{f(Q(t))}{P(f(t))}$ este bine definit pentru t suficient de mare.

Avem imediat că $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = \lim\limits_{t\to\infty} Q(t) = \lim\limits_{t\to\infty} f(t) = +\infty$, şi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(Q(t))}{t^{k-1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{f(Q(t))}{Q(t)} \cdot \frac{Q(t)}{t^{k-1}} = 1,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P(f(t))}{t^k} = \lim_{t\to\infty} \frac{P(f(t))}{f(t)^k} \cdot \frac{f(t)^k}{t^k} = 1.$$

....2 puncte

Fie $\varepsilon \in (0,1)$. Va exista din relaţiile anterioare $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice $t > \delta$, raportul de mai sus este bine definit şi

$$\left|\frac{f(Q(t))}{t^{k-1}} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{şi} \quad \left|\frac{P(f(t))}{t^k} - 1\right| < \varepsilon,$$

adică

$$(1-\varepsilon)\, t^{k-1} < f\,(Q(t)) < (1+\varepsilon)\, t^{k-1},$$
$$(1-\varepsilon)\, t^{k} < P\,(f\,(t)) < (1+\varepsilon)\, t^{k}.$$

De aici,

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\cdot\frac{1}{t} < \frac{f\,(Q(t))}{P(f\,(t))} < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\frac{1}{t}, \quad \forall t > \delta,$$

apoi

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\cdot\ln 2 = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\cdot\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,dt \le \int_x^{2x}\frac{f\,(Q(t))}{P(f\,(t))}\,dt \le \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\ln 2, \quad \forall x > \delta.$$

.... 3 puncte

Notând, pentru fiecare $x > \delta$,

$$G\,(x) := \int_x^{2x}\frac{f\,(Q(t))}{P(f\,(t))}\,dt,$$

vom avea că

$$\forall\varepsilon\in(0,1)\,,\exists\delta>0,\forall x>\delta : -\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\cdot\ln 2 \le G\,(x) - \ln 2 \le \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\ln 2,$$

de unde deducem că valoarea căutată a limitei este $\ln 2$. .... 1 punct

Problema 2.
Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $AB + BA = A + B$ (1). Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\operatorname{rang} AB + n = \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$

b) $\operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Im} A$.

Soluţie: Vom folosi caracterizarea cazului de egalitate din inegalitatea lui Sylvester:

$$\operatorname{rang} AB + n \ge \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Im} B$. .... 2 puncte
Cu această caracterizare afirmaţia b) este echivalentă cu

$$\operatorname{rang} BA + n = \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$$

şi suntem conduşi la ideea că $\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} BA$, ceea ce vom demonstra în continuare. 2 puncte
Din (1) rezultă

$$AB = A + B - BA = A + B(I_n - A) = I_n - (I_n - A) + B(I_n - A) = I_n - (I_n - B)(I_n - A) = I_n - DC,$$

cu $D = I_n - B, C = I_n - A$. Analog obţinem $BA = I_n - CD$ şi atunci:

$$\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} BA \iff \operatorname{rang}(I_n - CD) = \operatorname{rang}(I_n - DC) \qquad (2)$$

Vom demonstra egalitatea (2) în două moduri. .... 2 puncte
Metoda 1: Pentru orice matrici $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ demonstrăm incluziunile:

$$(3) \quad \operatorname{Ker}(I_n - CD) \subset \operatorname{Im} C, \quad (4) \quad \operatorname{Ker} C \subset \operatorname{Im}(I_n - DC).$$

Avem

$$(3) : X \in \operatorname{Ker}(I_n - CD) \iff X = C(DX) \iff X \in \operatorname{Im} C;$$
$$(4) : X \in \operatorname{Ker} C \iff X = X - D(CX) = (I_n - DC)X \iff X \in \operatorname{Im}(I_n - DC);$$

Conform cazului de egalitate din inegalitatea Sylvester avem

$$(3) \iff \operatorname{rang}(I_n - CD)\cdot C + n = \operatorname{rang}(I_n - CD) + \operatorname{rang} C$$
$$(4) \iff \operatorname{rang} C\cdot(I_n - DC) + n = \operatorname{rang}(I_n - DC) + \operatorname{rang} C$$

şi deoarece $(I_n - CD)\cdot C = C\cdot(I_n - DC)$ rezultă $\operatorname{rang}(I_n - CD) = \operatorname{rang}(I_n - DC)$...... 4 puncte

Problema 3.
Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune finită şi $T : V \to V$ un endomorfism.

a) Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ şi un endomorfism $P : V \to V$ cu proprietatea:

$$P \circ P = P, \quad \operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} T^k \quad \text{şi} \quad \operatorname{Im} P = \operatorname{Im} T^k.$$

b) Rămâne afirmaţia a) adevărată, în general, dacă V nu are dimensiune finită?

Soluţie. a) Considerăm şirul de subspaţii ale lui V: $\operatorname{Ker} T \subseteq \operatorname{Ker} T^2 \subseteq \ldots \subseteq \operatorname{Ker} T^n \subseteq \ldots$. Deoarece V are dimensiune finită, rezultă că există $k \geq 1$ astfel ca $\operatorname{Ker} T^k = \operatorname{Ker} T^{k+1}$. . . 2 puncte
Vom arăta prin inducţie că $\operatorname{Ker} T^{k+p} = \operatorname{Ker} T^k$, pentru orice $p \geq 1$.

Pentru $p = 1$ avem $\operatorname{Ker} T^k = \operatorname{Ker} T^{k+1}$. La pasul inductiv, presupunem că $\operatorname{Ker} T^{k+p} = \operatorname{Ker} T^k$. Este suficient să demonstrăm incluziunea $\operatorname{Ker} T^{k+p+1} \subseteq \operatorname{Ker} T^k$. Astfel,

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker} T^{k+p+1} &\Leftrightarrow T^{k+p+1}(x) = 0 \Leftrightarrow T^{k+p}(T(x)) = 0 \Leftrightarrow T(x) \in \operatorname{Ker} T^{k+p} = \operatorname{Ker} T^k \\ &\Leftrightarrow T^{k+1}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} T^{k+1} = \operatorname{Ker} T^k \\ &\Rightarrow x \in \operatorname{Ker} T^k, \end{aligned}$$

ceea ce încheie argumentaţia inductivă. . . . . 2 puncte

Vom arăta mai departe că $V = \operatorname{Ker} T^k \oplus \operatorname{Im} T^k$. Deoarece $\dim \operatorname{Ker} T^k + \dim \operatorname{Im} T^k = \dim V$, este suficient să arătăm că

$$\operatorname{Ker} T^k \cap \operatorname{Im} T^k = \{0\}.$$

Într-adevăr, dacă $x \in \operatorname{Ker} T^k \cap \operatorname{Im} T^k$, atunci $T^k(x) = 0$ şi există $x_1 \in V$ astfel ca $x = T^k(x_1)$. De aici, $T^{2k}(x_1) = T^k(x) = 0$, astfel că $x_1 \in \operatorname{Ker} T^{2k} = \operatorname{Ker} T^k$, prin urmare $x = T^k(x_1) = 0$. . . 2 puncte

Notăm $V_1 = \operatorname{Im} T^k$ şi $V_2 = \operatorname{Ker} T^k$, astfel că $V = V_1 \oplus V_2$. Atunci putem defini $P : V \to V$ prin $P(x_1 + x_2) = x_1$, pentru orice $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ (P este proiecţia pe V_1 paralelă cu V_2). Evident, P verifică cerinţele problemei. . . . . 2 puncte

b) Afirmaţia de la a) nu mai este, în general, adevărată dacă V nu are dimensiune finită.

Spre exemplu, luăm $V = \mathbb{R}[X]$ şi $T : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $T(f) = f'$ (operatorul de derivare). Astfel, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem $\operatorname{Ker} T^k = \mathbb{R}_{k-1}[X]$ şi $\operatorname{Im} T^k = \mathbb{R}[X]$. Dacă $P : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ verifică proprietăţile de la a) pentru un anume $k \in \mathbb{N}^*$, atunci $1 \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \operatorname{Ker} T^k = \operatorname{Ker} P$, deci $P(1) = 0$. De asemenea, $1 \in \mathbb{R}[X] = \operatorname{Im} T^k = \operatorname{Im} P$, deci există $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel ca $1 = P(f)$. Deoarece $P^2 = P$, se obţine următoarea contradicţie: $1 = P(f) = P^2(f) = P(1) = 0$. . . . . 2 puncte

Problema 4. Considerăm funcţia pară $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 pentru care $f(0) = 0$ şi $f''(0) > 0$. Definim şirul (a_n) de termen general

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right), \quad \forall n \geq 1.$$

(a) Arătaţi că funcţia f' este impară, şirul (a_n) este convergent şi calculaţi $\ell := \lim_{n\to\infty} a_n$.

(b) Presupunem, în plus, că f este de clasă C^4, cu $f^{(4)}(0) > 0$. Studiaţi natura seriilor

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \ell) \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(a_n - \ell).$$

Soluţie şi Barem de corectare (a) Demonstraţia faptului că f' este impară. . . . . 1 punct

Deducem $f'(0) = 0$. Deoarece f este de clasă C^2 şi $f''(0) > 0$, obţinem că $f''(x) > 0$ într-o vecinătate a lui 0, deci f' este crescătoare în acea vecinătate. Mai departe, deoarece $f'(0) = 0$, vom avea că există $\varepsilon > 0$ astfel încât $f'(x) \geq 0$ pe $[0, \varepsilon)$, adică f este crescătoare, deci are şi valori pozitive, pe $[0, \varepsilon)$.

Folosind monotonia lui f, vom avea succesiv, pentru orice $n \geq 1$,

$$f\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) \leq \int_k^{k+1} f\left(\frac{x}{n\sqrt{n}}\right) dx \leq f\left(\frac{k+1}{n\sqrt{n}}\right), \quad \forall k = \overline{0, n-1},$$

$$a_n + f(0) - f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) \leq \int_0^n f\left(\frac{x}{n\sqrt{n}}\right) dx \leq \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) = a_n,$$

şi, în final,

$$\int_0^n f\left(\frac{x}{n\sqrt{n}}\right) dx \leq a_n \leq \int_0^n f\left(\frac{x}{n\sqrt{n}}\right) dx + f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - f(0). \tag{1}$$

. . . . 2 puncte

Cum f este continuă, admite primitive, şi notând cu F o primitivă a sa care se anulează în 0, avem

$$F(0) = F'(0) = F''(0) = 0.$$

Din formula lui Taylor aplicată funcţiei F, deducem

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{F'''(0)}{6n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n f\left(\frac{x}{n\sqrt{n}}\right) dx = \lim_{n\to\infty} n\sqrt{n} F\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{f''(0)}{6}. \tag{2}$$

Din relaţia (1), folosind şi faptul că $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = f(0)$ din continuitatea lui f, rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{f''(0)}{6} = \ell \in \mathbb{R}$.

. . . . 2 puncte

(b) Ca mai sus, din f' impară rezultă f'' pară, apoi f''' impară, deci $f'''(0) = 0$. Deoarece f este de clasă C^4, putem folosi formula lui Taylor de ordin 4 pentru F, deci

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{f''(0)}{6n\sqrt{n}} + \frac{f^{(4)}(0)}{120n^2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right), \tag{3}$$

aşadar

$$\begin{aligned} n(a_n - \ell) &= n\left(a_n - \frac{f''(0)}{6}\right) \geq n\left(\int_0^n f\left(\frac{x}{n\sqrt{n}}\right) dx - \frac{f''(0)}{6}\right) \\ &= n\left(n\sqrt{n}F\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{f''(0)}{6}\right) \to \frac{f^{(4)}(0)}{120} > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Deducem, în baza criteriului de comparaţie, că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \ell)$ este divergentă.

. . . . 2 puncte

Din (1) şi (3), avem

$$n\left(a_n-\ell\right)\leq n\left(\int_0^n f\left(\frac{x}{n\sqrt{n}}\right)dx-\frac{f''\left(0\right)}{6}\right)+n\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-f\left(0\right)\right).$$

Dar, folosind din nou formula lui Taylor,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-f\left(0\right)\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{f''\left(0\right)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{f''\left(0\right)}{2}.$$

Aşadar, avem că

$$\frac{f^{(4)}\left(0\right)}{120}\leq\lim_{n\to\infty} n\left(a_n-\ell\right)\leq\frac{f^{(4)}\left(0\right)}{120}+\frac{f''\left(0\right)}{2}. \tag{5}$$

În plus, pentru orice x în vecinătatea lui 0, vom avea

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+f'\left(0\right)\cdot x+\frac{f''\left(0\right)}{2}x^2+o\left(x^2\right)=\frac{f''\left(0\right)}{2}x^2+o\left(x^2\right).$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(a_n-\ell\right)}{\left(a_n-\ell\right)^2}=\frac{f''\left(0\right)}{2}\in\left(0,+\infty\right),$$

deci, prin criteriul de comparaţie cu limită, avem că

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(a_n-\ell\right)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\ell\right)^2.$$

În baza relaţiei (5), obţinem că $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\ell\right)^2\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, deci este convergentă. ....3 puncte