Concursul Naţional Studenţesc de Matematică “Traian Lalescu”

Secţiunea A

9-11 mai 2024

Soluţii şi barem de corectare

Problema 1.
Fie $n \geq 2$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Arătaţi că există $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ şi $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât

$$B^2 = B, \quad \operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker} A^k \quad \text{şi} \quad \operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A^k.$$

Soluţie. Fie $J_A = \begin{bmatrix} J_1 & O \\ O & J_2 \end{bmatrix} = P^{-1}AP$ forma canonică Jordan a matricei A, unde $J_1 \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ conţine toate celulele Jordan corespunzătoare valorilor proprii nenule (J_1 este inversabilă), iar blocul $J_2 \in \mathcal{M}_{n-m}(\mathbb{C})$ conţine toate celulele Jordan corespunzătoare valorii proprii $\lambda = 0$ (este posibil ca J_2 să fie vid). .... 2 puncte

Dacă k este dimeniunea maximă a unei celule Jordan din blocul J_2, atunci avem:

$$J_A^k = \begin{bmatrix} J_1^k & O \\ O & O \end{bmatrix} = P^{-1}A^kP$$

(dacă $m = n$, atunci J_2 este vid, iar k poate fi luat 1). Definim $J_B = \begin{bmatrix} I_m & O \\ O & O \end{bmatrix}$ şi $B = PJ_BP^{-1}$, pentru care verificăm cerinţele problemei. Astfel:

- $B^2 = PJ_B^2P^{-1} = PJ_BP^{-1} = B$.

.... 4 puncte

Pentru orice $X \in \mathbb{C}^n$, notăm cu $X_1 \in \mathbb{C}^m$ şi $X_0 \in \mathbb{C}^{n-m}$ blocurile din reprezentarea $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_0 \end{bmatrix}$ (cu X_0 posibil vid).

- Dacă $X \in \mathbb{C}^n$, fie $Y = P^{-1}X$ şi atunci are loc şirul de echivalenţe:

$$X \in \operatorname{Ker} B \Leftrightarrow BX = O \Leftrightarrow PJ_BP^{-1}X = O \Leftrightarrow P\begin{bmatrix} I_m & O \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_0 \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow Y_1 = O.$$

  Pe de altă parte,

$$X \in \operatorname{Ker} A^k \Leftrightarrow A^kX = O \Leftrightarrow PJ_A^kP^{-1}X = O \Leftrightarrow P\begin{bmatrix} J_1^k & O \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_0 \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow J_1^kY_1 = O \Leftrightarrow Y_1 = O.$$

  Aşadar, $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker} A^k$ .... 2 puncte

- Dacă $Z \in \mathbb{C}^n$, atunci

$$Z \in \operatorname{Im} B \Leftrightarrow \text{există } X \in \mathbb{C}^n : Z = BX = PJ_BP^{-1}X \Leftrightarrow \text{există } Y \in \mathbb{C}^n : Z = PJ_BY$$
$$\Leftrightarrow \text{există } Y \in \mathbb{C}^n : Z = P\begin{bmatrix} I_m & O \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \text{există } Y_1 \in \mathbb{C}^m : Z = P\begin{bmatrix} Y_1 \\ O \end{bmatrix},$$

  (am folosit echivalenţa $Y = P^{-1}X \Leftrightarrow X = PY$). În mod similar,

$$Z \in \operatorname{Im} A^k \Leftrightarrow \text{există } U \in \mathbb{C}^n : Z = A^kU = PJ_A^kP^{-1}U \Leftrightarrow \text{există } V \in \mathbb{C}^n : Z = PJ_A^kV$$
$$\Leftrightarrow \text{există } V \in \mathbb{C}^n : Z = P\begin{bmatrix} J_1^k & O \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \text{există } V_1 \in \mathbb{C}^m : Z = P\begin{bmatrix} J_1^kV_1 \\ O \end{bmatrix},$$

  (am folosit echivalenţa $V = P^{-1}U \Leftrightarrow U = PV$). Deoarece

$$Y_1 = J_1^kV_1 \Leftrightarrow V_1 = \left(J_1^{-1}\right)^k Y_1,$$

  concluzionăm că $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A^k$ .... 2 puncte

Problema 2

Decideți dacă grupul multiplicativ $U(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ este ciclic.

Soluție și barem

Presupunem prin absurd că grupul multiplicativ $U(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ este ciclic. Folosind funcția indicatoare a lui Euler, avem

$card\ U(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}) = \varphi(2^n) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$. ....2 puncte

Deci există un număr întreg nenul k astfel încât $U(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}) = \{\hat{1}, \hat{k}, \hat{k}^2, \dots, \hat{k}^{2^{n-1}}\}$ și toate cele 2^{n-1} clase sunt distincte două câte două. ....3 puncte

Cum $\hat{k}$ este inversabil în $U(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$, atunci în mod necesar k este impar. Mai departe, se demonstrează prin inducție că, oricare ar fi n natural mai mare sau egal decât 3,

$$k^{2^{n-2}} = 1 (mod\ 2^n)$$

sau $\hat{k}^{2^{n-2}} = \hat{1}$. Contradicție. ....5 puncte

Problema 3

Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $A \neq 0$ astfel încât $A + BAC = BA + AC$. Să se arate că 1 este valoare proprie fie pentru matricea B, fie pentru matricea C, având multiplicitatea cel puțin egală cu rang$(A)/2$.

Soluție și Barem

Vom căuta să scoatem niște informații despre nucleele matricelor $B - I_n$ și $\mathrm{C} - I_n$. Relația dată poate fi rescrisă sub forma

$$(\mathrm{B} - I_n)\mathrm{A}(\mathrm{C} - I_n) = 0_\mathrm{n}$$ ....3 puncte

Folosind inegalitatea lui Frobenius pentru matricele $B - I_n, A$ și $C - I_n$, deducem că

$0 = \mathrm{rang}\big((B - I_n)A(C - I_n)\big) \geq \mathrm{rang}\big((B - I_n)A\big) + \mathrm{rang}\big(A(C - I_n)\big) - \mathrm{rang}(A)$. ....1 punct

Acum, aplicând inegalitatea lui Sylvester pentru $(B - I_n)A$ și $A(C - I_n)$, se obține

$0 \geq \mathrm{rang}(B - I_n) + \mathrm{rang}(C - I_n) + \mathrm{rang}(A) - 2n$..2 puncte

Concluzia rezultă de îndată ce adăugăm la argumentul nostru următoarea inegalitate

$n - \frac{\mathrm{rang}(A)}{2} \geq \min\{\mathrm{rang}(B - I_n), \mathrm{rang}(C - I_n)\}$..4 puncte

Problema 4.

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir de numere reale astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na_{n+1}) = l \in \mathbb{R}.$$

Arătați că seria $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ este convergentă și determinați suma acesteia.

Soluție și barem

Pentru orice număr natural n, notăm cu $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ și $T_n = S_n - na_{n+1}$. Vom arăta că S_n este convergent și are limita l folosind că $a_n \to 0$ și $T_n \to l$ pentru $n \to \infty$.

.... 1 puncte

Notăm că, pentru orice n, avem

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = \frac{S_n}{n} - \frac{T_n}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_n}{n(n+1)} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1}$$

.... 3 puncte

Sumând de la 1 la p, deducem că

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{T_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{p}\left(\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1}\right) = S_1 - \frac{S_{p+1}}{p+1} = S_1 - \frac{T_{p+1}}{p+1} - a_{p+2},$$

oricare ar fi p. Cum $a_n \to 0$, rezultă că (a_n) este mărginit. Deci seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{n(n+1)}$$

este absolut convergentă.. 2 puncte

Identitatea obținută mai sus ne permite să calculăm restul seriei de mai sus. Mai precis,

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{T_n}{n(n+1)} = \frac{S_{p+1}}{p+1}.$$

Dar $T_n \to l$, de unde rezultă că

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in N, \quad \forall n \in N: \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad l - \varepsilon \leq T_n \leq l + \varepsilon$$

Combinând expresia restului cu inegalitatea anterioară obținem următoarea estimare

$$\frac{S_{p+1}}{p+1} = \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{T_n}{n(n+1)} \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} (l+\varepsilon)\frac{1}{n(n+1)} = (T+\varepsilon)\frac{1}{p+1},$$

Oricare ar fi p natural ceea ce asigură estimarea $S_{p+1} < l + \varepsilon$. Analog obținem că $S_{p+1} > l - \varepsilon$. Deci șirul de termen general S_{p+1} este convergent cu limita egală cu l....................... 4 puncte